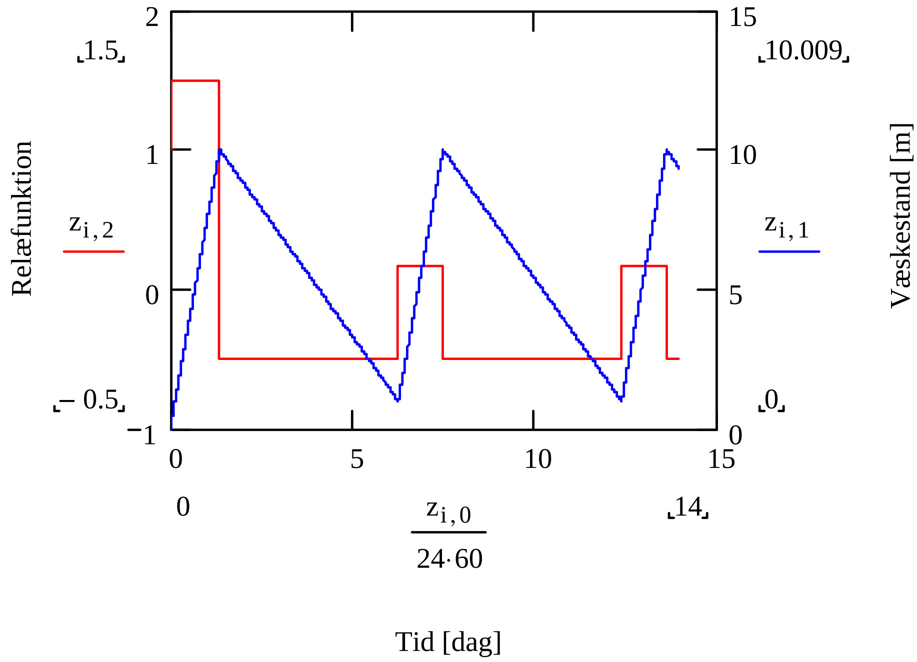
Introduktion til simulering og regulering med MathCad

Christensen, Knud Villy

Publication date:
2008

Citation for pulished version (APA):
Christensen, K. V. (2008). *Introduktion til simulering og regulering med MathCad*. (1 udg.) Syddansk Universitet. Institut for kemi-, bio- og miljøteknologi.

INTRODUKTION TIL SIMULERING og REGULERING med MathCad



1.udgave

Ved Knud Christensen

Syddansk Universitet

Institut for Kemi-, Bio- og Miljøteknologi

2008

1. Grundlæggende operationer i MathCad

Definition af konstanter:

$a := 1$

$b := 2$

$c := 3$

Bemærk, at := benyttes til at definere værdien på en konstant

Definition af beregnet værdi:

$$x_1 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_1 = -1 + 1.414i$$

$$x_2 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \qquad x_2 = -1 - 1.414i$$

Bemærk, at := benyttes til at definere en beregnet værdi, eller formel, medens = benyttes til at få resultatet af beregningen vist på skærmen.

Eksempel på symbolsk beregning:

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \rightarrow -1 + i \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \rightarrow -1 - i \cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

Bemærk at → benyttes til at angive, at beregningen skal foretages symbolsk.

Eksempel på definition af funktioner:

$$x_1(a, b, c) := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_2(a, b, c) := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Bemærk, at her bliver x_1 og x_2 betragtet som funktioner af a,b og c. Dette sker i MathCad automatisk, når et bogstav efterfølges af en parentes, som i f(x).

Eksempel på brug af funktioner:

$x_1(1,2,3) = -1 + 1.414i \quad x_2(1,2,3) = -1 - 1.414i$

$x_1(1,4,2) = -0.586 \quad x_2(1,4,2) = -3.414$

Bemærk, at man blot kan indtaste nye værdier i funktionskaldet, x_1(1,2,3) eller x_2(1,4,2).

2. Løsning af ligninger i MathCad

Til nummerisk løsning af ligninger, råder MathCad over en række funktioner. De simpleste vil blive gennemgået her.

Rodsøgning ved brug af MathCad:
Ikke alle ligninger har en analytisk løsning. Som eksempel kan vises:

$$f(x) := \exp\left(\frac{-1727}{50x + 298}\right) - \frac{x^2}{(1-x)\cdot(2-x)}$$

Denne ligning skal for det søgte x, være ligmed 0, men man kan, tiltrods for, at der må være én løsning, ikke isolere den ubekendte x. Dette er et problem man ofte er udsat for som ingeniør. Man foretager derfor, hvad der kaldes en rodsøgning. Dette kan MathCad gøre for en

$$\text{root}(f(x), x, 0, 0.99) = 0.076$$

Bemærk, at her benyttes en prædefineret funktion:

root(f(variabel),variabel, nedregrænse,øvregrænse)

MathCad råder over en lang række forudefinerede funktioner, som brugeren af programmet frit kan benytte. Disse er velbeskrevet i MathCads hjælpefunktion Help.
I dette specifikke tilfælde benyttes root, som automatisk finder ét nulpunkt i funktionen f(variabel) imellem den indtastede nedre og øvre grænseværdi under forudsætning af, at en sådan rod findes i dette interval. Ønsker man at indlæse roden i et variabelnavn til senere brug i ens MathCad program, kan dette gøres ved at skrive:

$$x := \text{root}(f(x), x, 0, 0.99)$$

Her er x nu blevet defineret, som værende resultatet af rodsøgningen. Ønsker man at se resultatet skrives blot:

$$x = 0.076$$

Polynomier har som bekendt flere rødder, helt præcist n for et n'de ordens polynomie.
Til at finde rødder i polynomier, råder MathCad over en speicial funktion, polyroots.

$$f(x,a,b,c,d) := a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$$

$$a := 2$$
$$b := 1$$
$$c := 3$$
$$d := -1$$

$$v := \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.395 + 1.254i \\ -0.395 - 1.254i \\ 0.289 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at polyroots(vektor) kaldes med en søjlevektor, v, som indeholder koefficienterne til polynomiet. Disse koefficienter skal være angivet i rækkefølgen laveste eksponents koefficient først.
Vektorer (og matricer) oprettes i MathCad som alle andre variable. Det nemmeste er blot at skrive vektorens navn efterfulgt af := og dernæst vælge Matrix or Vector på MathCads Vector or Matrix toolbar.

De viste metoder kan desværre kun bruges til løsning af en ligning med en ubekendt. Som det vil være den studerende bekendt, er verden sjældent så simpel, så fra tid til anden vil det være rart, at kunne løse flere ligninger med flere ubekendte. Dette kan MathCad også klare, omend der ikke er nogen garanti for, at MathCad finder én løsning, hvis problemet er ulinært.

Først et eksempel på løsning af et sæt af linære ligninger:

$$0.3\cdot w + 0.2\cdot x + 6.6\cdot y - 1.1\cdot z = 1$$

$$4.5\cdot w - 1.8\cdot x - 0.3\cdot y + 6.5\cdot z = .1$$

$$-7.3\cdot w + 9.7\cdot x + 10.9\cdot y - 4.1\cdot z = .01$$

$$8.1\cdot w - 2.7\cdot x + 8.7\cdot y + 8.9\cdot z = .001$$

Først oprettes en matrix, M, indeholdende koefficienterne til de ubekendte:

$$M := \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 6.6 & -1.1 \\ 4.5 & -1.8 & -0.3 & 6.5 \\ -7.3 & 9.7 & 10.9 & -4.1 \\ 8.1 & -2.7 & 8.7 & 8.9 \end{pmatrix}$$

Dernæst en vektor indeholdende højresiden af ligningerne:

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0.1 \\ 0.01 \\ 0.001 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Loesning} := \mathrm{lsolve}(M, v)$$

Løsningen til ligningen kommer på vektorform:

$$\mathrm{Loesning} = \begin{pmatrix} -3.937 \\ -2.975 \\ 0.746 \\ 1.952 \end{pmatrix}$$

Ønsker man at få de enkelte værdier fra vektoren overført til x,y,z og w, gøres dette således:

$w := \mathrm{Loesning}_0$ $\qquad w = -3.937$

$x := \mathrm{Loesning}_1$ $\qquad x = -2.975$

$y := \mathrm{Loesning}_2$ $\qquad y = 0.746$

$z := \mathrm{Loesning}_3$ $\qquad z = 1.952$

Bemærk, at første plads i vektoren benævnes 0, ikke 1 og at loesningerne fremkommer i den rækkefælge de variable blev skrevet til ligningen. Man skal således holde en konsekvent rækkefølge for de variable i hver ligning.
For at uddrage en specifik værdi fra en vektor eller en matrix, skal man kalde vektor eller matrix indiceret. Dette gøres nemmest ved at skrive matrixnavn og dernæst vælge x_n på Matrix Toolbar.

Har man ikke at gøre med lineære ligningssystemer, bliver man nødt til at benytte en "gæt-og-find" metode. I MathCad foretages dette ved hjælp af en såkaldt solveblock. Dette gøres som følger:

$x := 0 \quad y := 9$

Given

$x^2 + y = 1$

$x + y^2 = 1$

$z := \mathrm{Find}(x, y)$

$$z = \begin{pmatrix} 3.728 \times 10^{-6} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x := z_0$

$y := z_1$

Solve blocken startes med "det magiske ord" Given, hvorefter de enkelte ligninger skrives ind. Her skal det bemærkes, at lighedstegnet hverken er et :=, definitionslighedstegn, eller et =, et ligmedstegn, men derimod =, et boolean (sand/falsk) lighedstegn. Dette indsættes nemmest ved brug af MathCads boolean toolbar. Efter ligningerne er indtastet afsluttes solve block'en ved kald af funktionen Find(variabel, variabel,..). Som vist kan man definerer en vektor, her z, som så sættes ligmed Find(x,y). Denne vektor indeholder da løsningen til x og y. Den første værdi i z-vektoren svarer til den første variabel i Find(x,y).
Således bliver z_0 løsningen til x og z_1 løsningen til y.

Bemærk, at der før Given er anbragt værdier for x og y. Disse værdier udgør startgæt for den iterative løsningsprocedure MathCad bruger til at finde løsninger. Er der flere løsninger til ligningssystemet, vil man kunne påvirke, hvilken løsning MathCad finder ved at ændre på startgæt:

$x := 1 \quad y := 9$

Given

$x^2 + y = 1$

$x + y^2 = 1$

$z := \mathrm{Find}(x, y)$

$$z = \begin{pmatrix} 0.618 \\ 0.618 \end{pmatrix}$$

$x := z_0$

$y := z_1$

eller

$x := 1 \quad y := 0$

Given

$$x^2 + y = 1$$

$$x + y^2 = 1$$

$z := \text{Find}(x, y)$

$$z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x := z_0$

$y := z_1$

Alle tre løsningspar er korrekte.

Endeligt kan MathCad, omend i begrænset omfang, løse flere ligninger med flere ubekendte analytisk:

$x := 1 \quad y := 0$

Given

$$x^2 + y = 1$$

$$x + y^2 = 1$$

$$\text{Find}(x, y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 5^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Herved fås, omend i mindre overskuelig form, alle løsning på en gang. Dette forudsætter dog, at der er analytiske løsninger, hvilket ikke behøver at være tilfældet.

3. Løsning af integraler i MathCad

MathCad kan løse integraler nummerisk og analytisk. Dette gøres nemt:

$$f(x) := 2\cdot x^2 + 1$$

$$z := \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$z = 7.333$$

Man kan lige så enkelt prøve at finde en analytisk løsning:

$$\int_0^2 f(x)\,dx \rightarrow \frac{22}{3}$$

Man skal dog ved brug af MathCad være klar over, at den nummeriske integrationsrutine ikke automatisk finder singulariteter i en funktion, hvilket kan lede til fejlagtige resultater.

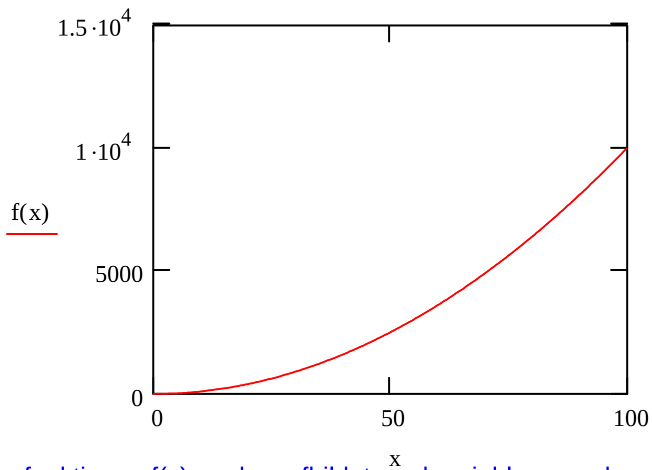
4. Afbildning af funktioner i MathCad:

MathCad giver mulighed for at fremstille grafer af ens funktioner.

Man kan eksempelvis fremstille funktioner i kartesiske koordinater:

$x := 0, .5 .. 100$

$f(x) := x^2 + 1$



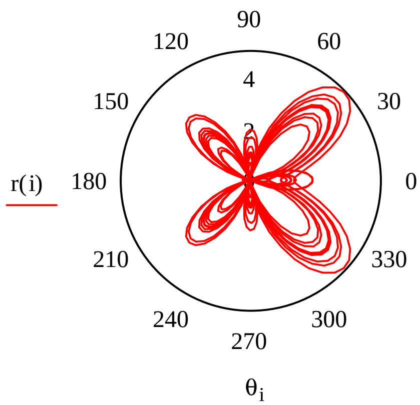
Da funktionen f(x) ønskes afbildet mod variablen x ved en række værdier af x, oprettes x som en løbevariabel med værdierne 0, 0,5, 1, 1,5 ,.....,99,5, 100. Dette gøres ved at skrive x, vælge :=, taste startværdi (0), næste værdi (0.5) vælge løbeparameterfunktionen m..n på Matrix toolbar og indtaste slutværdien (100). Dernæst oprettes funktionen som skal afbildes, her f(x). Selve afbildningen foretages ved på Graph toolbar at vælge ikonet for x-y plot. og på de sorte felter at skrive x for abscissen henholdsvis f(x) for ordinaten.

Man kan naturligvis også vælge, at arbejde i polære koordinater:

$i := 0 .. 1000$

$\theta_i := \frac{i}{1000} \cdot 24 \cdot \pi$

$r(i) := e^{\cos(\theta_i)} - 2 \cdot \cos(4\,\theta_i) + \sin\left(\frac{\theta_i}{12}\right)^5$

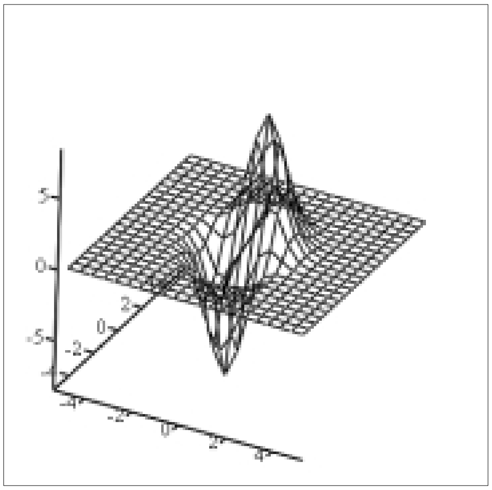


Her illustreret ved Fays sommerfugl. Det græske bogstav θ_i indsættes ved brug af Greek toolbar, medens det polære plot fås fra Graph toolbar.

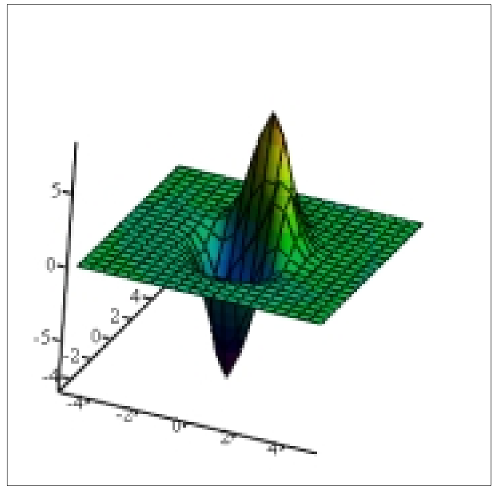
Endeligt kan der fremstilles tredimensionale grafer:

$$f(x,y) := 10\left(x^3 + y^5 + \frac{1}{5}\cdot x\right)\cdot \exp\left(-x^2 - y^2\right) + \frac{1}{3}\cdot \exp\left[-(x-1)^2 - y^2\right]$$

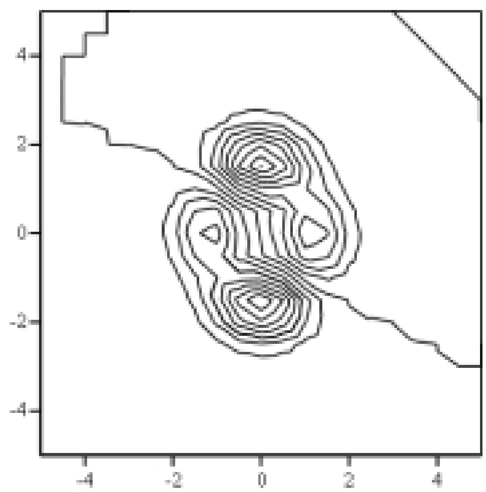
$$M(x,y) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$



M



M



M

De tre grafer er henholdsvis et gitterplot, et farvelagt gitterplot og et konturplot. Disse tredimensionale plot forventer, at man indsætter en vektorfunktion som vist, M, der afhænger af to variable. Som standard vil fladekoordinaterne, her x,y, løbe fra -5 til 5, men dette kan ændres ved at klikke med højre musetast på grafen.

Man kan i MathCad også udføre tredimensionelle afbildninger af parameterfremstillinger. Et eksempel er fremstillingen af en såkaldt torus. Parameterfremstillingen er som følger:

Fremstilling i sfæriske koordinater:

Afstand af toruscentrum fra origo: $R := 1$

Radius af torus: $r := 0.3$

Løbeparametre: $N := 30$ $\quad i := 0..N$ $\quad j := 0..N$

Vinkelværdier parameterfremstillingen gennemløber: $\phi_i := i \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N}$ $\quad \theta_j := j \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{N}$

Omskrivning af værdier i sfæriske koordinater til cartesiske koordinater:

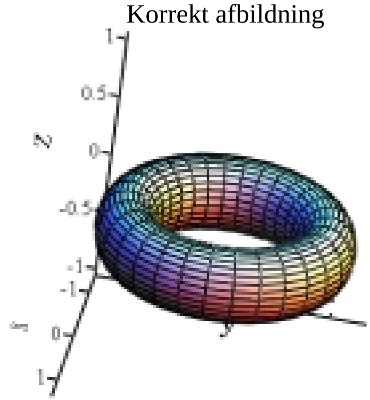
$$x_{i,j} := \left(R + r \cdot \cos\left(\phi_i\right)\right) \cdot \cos\left(\theta_j\right)$$

$$y_{i,j} := \left(R + r \cdot \cos\left(\phi_i\right)\right) \cdot \sin\left(\theta_j\right)$$

$$z_{i,j} := r \cdot \sin\left(\phi_i\right)$$

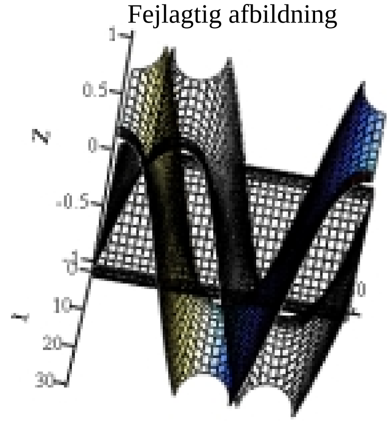
Afbildning:

Korrekt afbildning



(x, y, z)

Fejlagtig afbildning



x, y, z

Bemærk, at man skriver koordinatværdierne x, y og z i en parantes. Dette betyder, at x,y og z opfattes som et sammenhørende talsæt, som de skal i følge parameterfremstillingen. Indsættes x,y og z uden en parantes, vil de blive opfattet som tre selvstændige funktioner, hvilket giver et helt andet billede.

5. Løsning af differentialligninger i MathCad:

MathCad giver mulighed for at løse ordinære differentialligninger (forkortes ODE, E for equations). Dette er en fordel, da mange masse- og energibalancer for biokemiske reaktorer netop optræder som ODE's. Dette gælder især, hvis man også skal opsætte en regulerings- eller styringssløjfe over reaktoren.
MathCad kan ikke finde analytiske løsninger til ODE's, kun numeriske løsninger kan fås. Dette er dog af mindre betydning, da man i regulering for det meste kun er interesseret i en numerisk løsning og da der iøvrigt kun i særlige tilfælde kendes analytiske løsninger til masse- og energibalancer for biokemiske reaktorer.
I det følgende vil derfor blive givet en kort introduktion til numerisk løsning af differential-ligninger ved brug af MathCad. Den numeriske metode, der vil blive introduceret her, er en fjerde ordens Runge-Kutta metode. Selve den numeriske baggrund vil ikke blive gennemgået her, men er beskrevet eksempelvis side 947-951 i E. Kreysig Advanced Engineering Mathematics, 8. udg., John Wiley and Sons, 1999. I dette kursus er det tiltrækkeligt at kunne bruge MathCad's indbyggede funktion rkfixed. Brugen heraf vil blive gennemgået i det følgende.

5.1 Løsning af en førsteordens ordinær differentialligning:

Ved en førsteordens differentialligning forstås en differentialligning i hvilket den højeste aflede af den afhængige variabel (eller funktion om man vil) er af første orden, eksempelvis:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

Her er den afhængige variabel (eller funktion) y, medens den uafhængige variabel er x.
For at kunne løse denne differentialligning skal man kende en grænseværdibetingelse. I dette tilfælde kendes eksempelvis startbetingelsen:

$y := 4$ for $x := 0$

Ligningen kan naturligvis løses ved simpel separation af de variable, men i det følgende illustreres brugen af MathCads funktion rkfixed.
For at kunne benytte rkfixed skal man kende følgende:

1. En startbetingelse for hver førsteordens differentialligning som skal løses, for højere ordens ligninger en for hver højre orden og en for hver ligning. For en andens ordens differentialligning således to startbetingelser.
2. Start- og slutværdien for den uafhængige variabel
3. Antal støttepunkter hvori man ønsker at kende værdien af den afhængige variabel.
4. Differentialligningen skrevet i explicit form.

Når dette er klarlagt, kan man starte løsningen af differentialligningen.

Vi kender startbetingelsen y = 4 for x = 0. Lad os antage, at vi ønsker at kende y i området for x = 0 til x = 4 og have 10 støttepunkter. Vi mangler nu blot at skrive differentialligningen i explicit form. Dette gøres ved at isolere differentiallet af højeste orden på ligningens venstre side:

$$\frac{dy}{dx} = -3y$$

Vi kan herefter benytte rkfixed til at løse differentialligningen:

Definition af konstanter:

Startbetingelse: $y_0 := 4$ Bemærk at y er defineret som en vektor, dette forventer rkfixed.

Antal støttepunkter: $\text{npunkter} := 10$

Startværdi for x: $\text{xstart} := 0$

Slutværdi for x: $\text{xslut} := 4$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0 .. \text{npunkter}$

Definition af højresiden af differentialligningen:

$$D(x,y) := -3 \cdot y_0$$

Løsning af differentialligning ved brug af rkfixed:

$$z := \text{rkfixed}(y, \text{xstart}, \text{xslut}, \text{npunkter}, D)$$

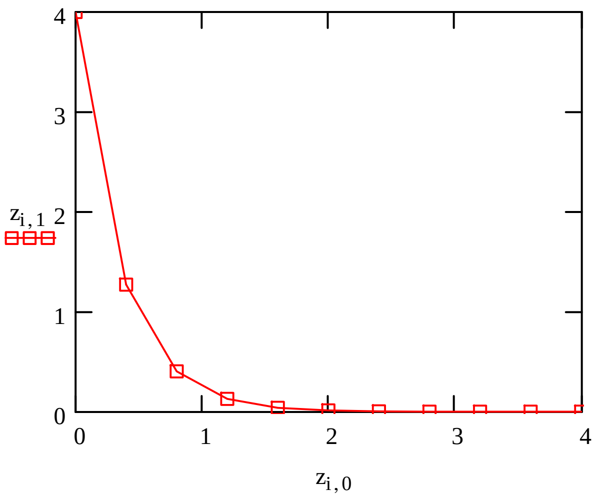
Udskrift af løsning i tabelform:

z =

	0	1
0	0	4
1	0.4	1.274
2	0.8	0.406
3	1.2	0.129
4	1.6	0.041
5	2	0.013
6	2.4	$4.168 \cdot 10^{-3}$
7	2.8	$1.327 \cdot 10^{-3}$
8	3.2	$4.225 \cdot 10^{-4}$
9	3.6	$1.345 \cdot 10^{-4}$
10	4	$4.283 \cdot 10^{-5}$

Bemærk at z er en matrix, hvis første kolonne indeholder værdierne for den uafhængige variabel x, den anden kolonne de tilhørende værdier for den afhængige variabel y.

Man kan også vælge at fremstille løsningen i kartesiske koordinater:



5.2 Løsning af en andenordens ordinær differentialligning:

Selvom Runge-Kutta's metode i princippet kun gælder førsteordens differentialligninger kan den også bruges til løsning af differentialligninger af højere orden. Dette vil blive illustreret ved løsning af andenordens differentialligningen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

Den afhængige variabel (eller funktion) er y, medens den uafhængige variabel er x.
For at kunne løse denne differentialligning, skal man kende to grænseværdibetingelse. I dette tilfælde kendes eksempelvis startbetingelserne:

$y := 1$ $\quad \frac{dy}{dx} = 3$ for $x := 0$

Ligningen er en linær andenordens differentialligning og har naturligvis en analytisk løsning, men i det følgende illustreres brugen af MathCads funktion rkfixed. For at bruge rkfixed skal differentialligningen i princippet være af første orden. Dette klares ved at opsplitte ligningen i to sammenhørende, man kalder det koblede, førsteordens differentialligninger:

Man definerer først to nye afhængig variable, y_0 og y_1: $y_0 = y \quad y_1 = \frac{dy}{dx}$

Dernæst omskrives den andenordens differentialligning til to koblede førsteordens differentialligninger:

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1 - 2\,y_0 = 0$$

Vi kender startbetingelserne $y_0 = 1$ og $y_1 = 3$ for $x = 0$. Lad os antage, at vi ønsker at kende y i området for x = 0 til x = 0.5 og have 10 støttepunkter. Vi mangler nu blot at skrive differential-ligningerne i explicit form. Dette gøres ved at isolere differentiallet af højeste orden på ligningens venstre side:

$$\frac{dy_0}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_1}{dx} = -y_1 + 2\cdot y_0$$

Vi kan herefter benytte rkfixed til at løse differentialligningen:

Definition af konstanter:

Startbetingelse: $y := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bemærk at y er defineret som en vektor med variablen y_0 som første komponent og variablen y_1 som anden komponent.

Antal støttepunkter: $npunkter := 10$

Startværdi for x: $xstart := 0$

Slutværdi for x: $xslut := 0.5$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $j := 0..npunkter$

Definition af højresiden af differentialligningen:

$$D(x, y) := \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_1 + 2\cdot y_0 \end{pmatrix}$$

Bemærk at D(x,y) er defineret som en vektor med højresiden for førsteordens differentialligningen til y_0 som første komponent og højresiden for førsteordens differential- ligningen til y_1 som anden komponent.

Løsning af differentialligning ved brug af rkfixed:

$z := \mathrm{rkfixed}(y, xstart, xslut, npunkter, D)$

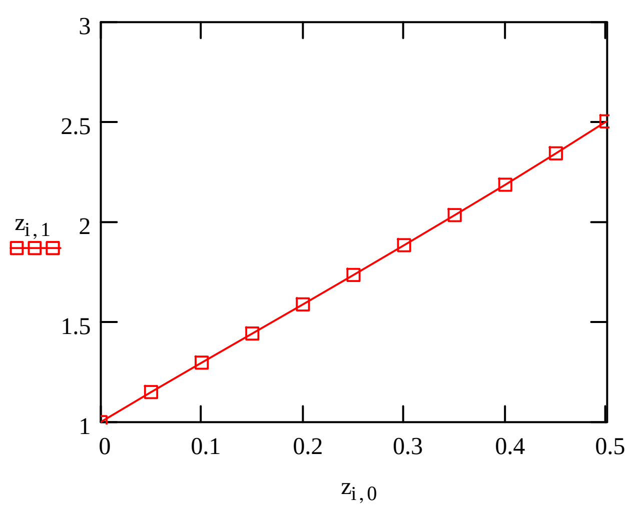
Udskrift af løsning i tabelform:

z =

	0	1	2
0	0	1	3
1	0.05	1.149	2.959
2	0.1	1.296	2.934
3	0.15	1.443	2.924
4	0.2	1.589	2.929
5	0.25	1.736	2.949
6	0.3	1.884	2.982
7	0.35	2.034	3.027
8	0.4	2.187	3.085
9	0.45	2.343	3.156
10	0.5	2.503	3.238

Bemærk at z er en matrix, hvis første kolonne indeholder værdierne for den uafhængige variabel x, den anden kolonne de tilhørende værdier for den afhængige variabel y_0, medens den tredie kolonne indeholder løsningen til variablen y_1. Da y er identisk med y_0 er differentialligningens løsning kolonne 1 (den anden kolonne), medens kolonne 2 indeholder den første afledede til y, skulle man have brug for denne.

Man kan også vælge at fremstille løsningen i kartesiske koordinater:



5.3 Løsning af to koblede førsteordens ordinær differential-ligning:

I forbindelse med beregninger på fermentorer har man ofte brug for at løse mindst to, men typisk flere, massebalancer samtidigt. Typisk skal man både bestemme koncentrationen af en mikroorganisme og af substratet til denne. Dette leder til, at man skal løse to eller flere koblede differentialligninger.Fremgangsmåden vil kort blive illustreret her ved løsning af de koblede differentialligninger:

$$\frac{dx}{dt} = k1 \cdot x - S - \left(x^2 + S^2\right) \cdot x$$

$$\frac{dS}{dt} = k1 \cdot S + x - \left(x^2 + S^2\right) \cdot S$$

Den første afhængige variabel (eller funktion) er x, den anden afhængige variabel S, medens den uafhængige variabel er t.
For at kunne løse denne differentialligning, skal man kende to grænseværdibetingelser. I dette tilfælde kendes eksempelvis startbetingelserne:

$x := 0 \quad S = 1$ for $t := 0$

Man definerer to nye afhængig variable, y_0 og y_1: $y_0 = x \quad y_1 = S$

Man har således de to koblede førsteordens differentialligninger:

$$\frac{dy_0}{dt} = k1 \cdot y_0 - y_1 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right] \cdot y_0$$

$$\frac{dy_1}{dt} = k1 \cdot y_1 + y_0 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right] \cdot y_1$$

Vi kender startbetingelsen $y_0 = 0$ og $y_1 = 1$ for $t = 0$. Lad os antage, at vi ønsker at kende y i området for t = 0 til t = 20 og have 20 støttepunkter.

Vi kan herefter benytte rkfixed til at løse differentialligningen:

Definition af konstanter:

Startbetingelse: $y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bemærk at y er defineret som en vektor med variablen y_0 som første komponent og variablen y_1 som anden komponent.

Antal støttepunkter: $npunkter := 20$

Startværdi for t: $tstart := 0$

Slutværdi for t: $tslut := 20$

Værdi for k1: $k1 := -.2$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $j := 0 .. npunkter$

Definition af højresiden af differentialligningen:

$$D(t, y) := \begin{bmatrix} k1 \cdot y_0 - y_1 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right] \cdot y_0 \\ k1 \cdot y_1 + y_0 - \left[\left(y_0\right)^2 + \left(y_1\right)^2\right] \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

Bemærk at D(x,y) er defineret som en vektor med højresiden for førsteordens differentialligningen til y_0 som første komponent og højresiden for førsteordens differentialligningen til y_1 som anden komponent.

Løsning af differentialligning ved brug af rkfixed:

$z := rkfixed(y, tstart, tslut, npunkter, D)$

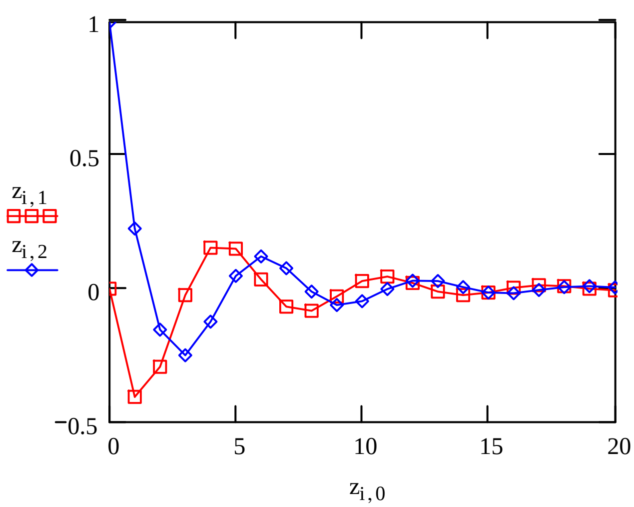
Udskrift af løsning i tabelform:

z =

	0	1	2
0	0	0	1
1	1	-0.405	0.225
2	2	-0.293	-0.153
3	3	-0.025	-0.25
4	4	0.153	-0.124
5	5	0.149	0.048
6	6	0.034	0.122
7	7	-0.067	0.077
8	8	-0.082	-0.011
9	9	-0.029	-0.061
10	10	0.029	-0.048
11	11	0.045	$-1.775\cdot10^{-3}$
12	12	0.022	0.03
13	13	-0.011	0.028
14	14	-0.024	$5.263\cdot10^{-3}$
15	15	-0.015	-0.014
16	16	$3.253\cdot10^{-3}$	-0.016
17	17	0.013	$-5.175\cdot10^{-3}$
18	18	$9.279\cdot10^{-3}$	$6.393\cdot10^{-3}$
19	19	$-2.019\cdot10^{-4}$	$9.238\cdot10^{-3}$
20	20	$-6.422\cdot10^{-3}$	$4.022\cdot10^{-3}$

Bemærk at z er en matrix, hvis første kolonne indeholder værdierne for den uafhængige variabel t, den anden kolonne de tilhørende værdier for den afhængige variabel y_0, medens den tredie kolonne indeholder løsningen til variablen y_1. Da x er identisk med y_0 og S identisk med y_1 er løsningen til differentialligningerne i både kolonne 1 (den anden kolonne), og kolonne 2.

Man kan også vælge at fremstille løsningen i kartesiske koordinater:



6. Brug af MathCad til Simulering af trinrespons

I forbindelse med brug af MathCad til simulering af trinrespons fra systemer, her typisk fermentorer, er der en række fremgangsmåder, der kan være gode at kende. Nogle af de mere gængse vil kort blive illustreret i det følgende.

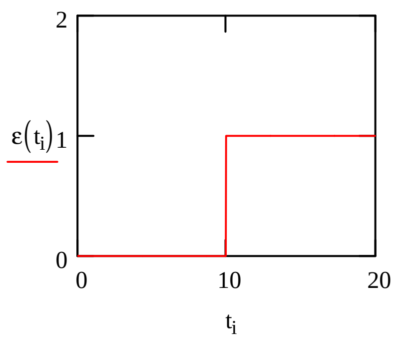
6.1 Brug af MathCad til simulering af forstærkning af et trinrespons

En forstærkning er en forøgelse eller en formindskelse af et signal. Typisk kan der være tale om en automatisk omregning foretaget af en måleenhed mellem den reelt registrerede påvirkning, typisk en ændring i elektrisk modstand, til eksempelvis den til ændringen svarende temperatur eller tryk. I de fleste tilfælde vil forstærkningen blot være en konstant K, der skal ganges på signalet $\varepsilon(t)$.
En virkelig trinændring i et signal er en pludselig ændring til et givent tidspunkt t, eksempelvis tiden 10, fra en gammel værdi, eksempelvis 0, til en ny værdi, eksempelvis 1:

Trinændring i signal: $\varepsilon(t) := \text{if}(t < 10, 0, 1)$ Bemærk brugen af if(sand/falsk udsagn,hvis sand, hvis falsk)

Løbeparameter: $i := 0 .. 1000$

Tid: $t_i := \frac{20}{1000} \cdot i$



Ønsker man at indsætte dette i en integrerende formel, eksempelvis rkfixed, men bibeholde

en ren trinfunktion, går dette galt:

Definition af konstanter:

Den afhængige variabel er i det følgende defineret som $y61_0$:

Startbetingelse: $y61_0 := 0$

Antal støttepunkter: $npunkter := 500$

Startværdi for t: $tstart := 0$

Slutværdi for t: $tslut := 20$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0..npunkter$

Integrerende formel: $DF(t, y) := \varepsilon(t)$

Løsning af formel ved brug af rkfixed:

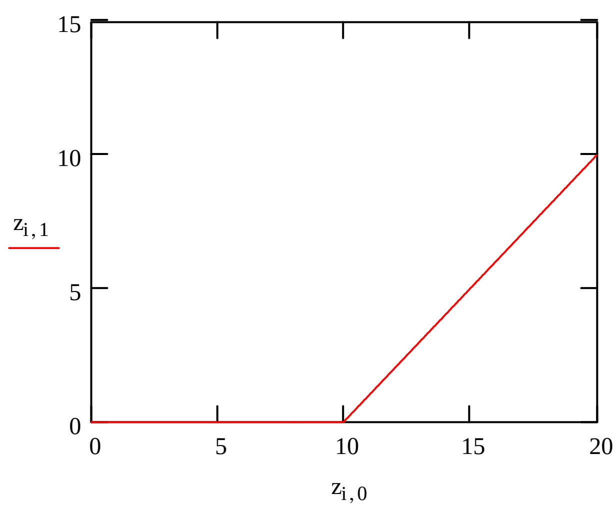
$z := rkfixed(y61, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

z =

	0	1
0	0	0
1	0.04	0
2	0.08	0
3	0.12	0
4	0.16	0
5	0.2	0
6	0.24	0
7	0.28	0
8	0.32	0
9	0.36	0
10	0.4	0

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



Bemærk at værdien af ændringen vedbliver at stige i en rampe. Dette skyldes at ændringen integreres op til funktionen:

$$y = \varepsilon(t) \cdot t$$

Istedet kan følgende gengivelse benyttes::

Signal: $\varepsilon(t) := \text{if}(9.999 < t < 10.001, 1, 0)$ Bemærk at ændringen kun tillades at stige i et kort tidsrum svarende til at man integrerer over den afledede af signalet

Integrerende formel: $DF(t, y) := 75\,\varepsilon(t)$

Løsning af formel ved brug af rkfixed:

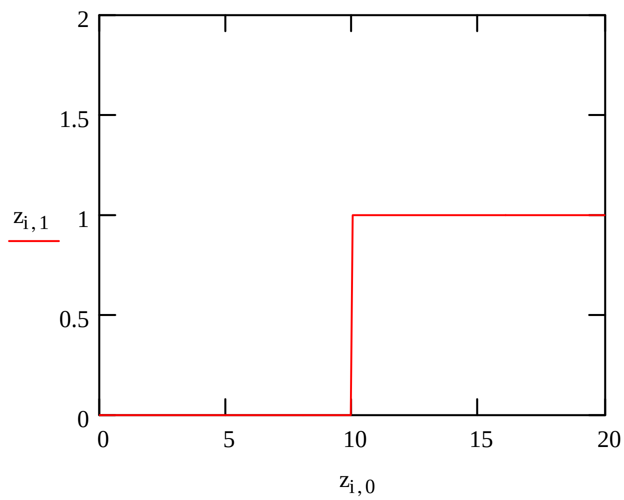
$z := \text{rkfixed}(y61, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

$z =$

	0	1
0	0	0
1	0.04	0
2	0.08	0
3	0.12	0
4	0.16	0
5	0.2	0
6	0.24	0
7	0.28	0
8	0.32	0
9	0.36	0
10	0.4	0

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



Bemærk at der skal en forstærkningsfaktor på signalet, 75. Denne er fundet ved tilpasning, således at y bliver 1. Bemærk også at signalet ikke er et ægte trinrespons, da kurven ikke stiger lodret, men afviger herfra. Generelt bør den integrerende metode ikke benyttes, med mindre systemet rent faktisk integrerer signalet.

6.2 Brug af MathCad til simulering af simpelt 1. ordens respons

Et system siges at udvise første ordens respons, hvis det kan beskrives ved en første ordens differentialligning:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon(t) - y(t)$$

Dets respons på en trinædring i et signal ε(t) vil da kunne brives ved:

Definition af konstanter:

Startbetingelse: $y62_0 := 0$

Trinændring i signal: $\varepsilon(t) := \text{if}(t < 10, 0, 1)$

Antal støttepunkter: $npunkter := 500$

Startværdi for t: $tstart := 0$

Slutværdi for t: $tslut := 20$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0 .. npunkter$

Definition af højresiden i differentialligning:

$$DF(t, y62) := \varepsilon(t) - y62_0$$

Løsning af differentialligning ved brug af rkfixed:

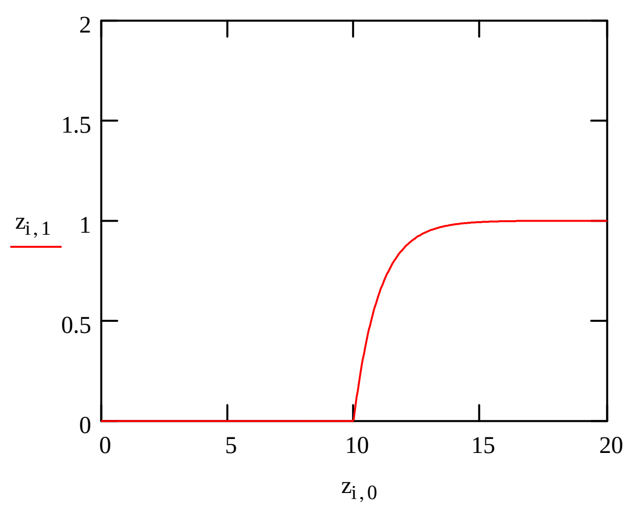
$$z := \text{rkfixed}(y62, tstart, tslut, npunkter, DF)$$

Udskrift af løsning i tabelform:

z =

	0	1
0	0	0
1	0.04	0
2	0.08	0
3	0.12	0
4	0.16	0
5	0.2	0
6	0.24	0
7	0.28	0
8	0.32	0
9	0.36	0
10	0.4	0

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



6.3 Brug af MathCad til simulering to processer i serie med dødtid imellem

Et system siges at udvise en dødtid, hvis der er en tidsforsinkelse på respons til en signalændring. Dette vil her blive illustreret ved to første ordens respons systemer i serie med en dødtid τ imellem:

$$\frac{dy0}{dt} = \varepsilon 0(t) - y0(t)$$

$$\frac{dy1}{dt} = \varepsilon 1(t) - y1(t)$$

Definition af konstanter:

Startbetingelse: $y0_0 := 1$

$y1_0 := 1$

Antal støttepunkter: $npunkter := 100$

Startværdi for t: $tstart := 0$

Slutværdi for t: $tslut := 60$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0 .. npunkter$

Tidsintervalbredde: $\Delta t := \dfrac{tslut - tstart}{npunkter}$ Bemærk at bredde af et tidsinterval i integrationen senere benyttes til at beregne værdien af udgangssignalet fra første system til andet system

Signalværdi til første system: $\varepsilon 1(t) := if(t < 10, 1, 2)$

Dødtid: $\tau := 10$

Definition af højresiden for første system:

$$DF(t, y0) := \varepsilon 1(t) - y0_0$$

Løsning af responsligning for første system ved brug af rkfixed:

$$\varepsilon 1 := rkfixed(y0, tstart, tslut, npunkter, DF)$$

Indgangssignal til andet system: $\varepsilon 1t(t) := if\left(t < \tau, \varepsilon 1_{0,1}, \varepsilon 1_{round\left(\frac{t-\tau-tstart}{\Delta t}\right), 1}\right)$

Bemærk at bredde af et tidsinterval i integrationen senere benyttes til at beregne værdien af udgangssignalet fra første system til andet system

Definition af højresiden for andet system:

$DF(t, y1) := \varepsilon 1t(t) - y1_0$

Løsning af responsligning for andet system ved brug af rkfixed:

$\varepsilon 2 := \mathrm{rkfixed}(y1, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

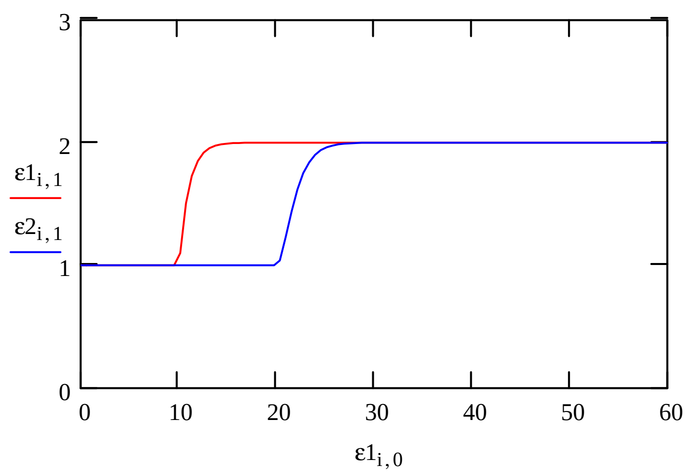
$\varepsilon 1 =$

	0	1
0	0	1
1	0.6	1
2	1.2	1
3	1.8	1
4	2.4	1
5	3	1
6	3.6	1
7	4.2	1
8	4.8	1
9	5.4	1
10	6	1

$\varepsilon 2 =$

	0	1
0	0	1
1	0.6	1
2	1.2	1
3	1.8	1
4	2.4	1
5	3	1
6	3.6	1
7	4.2	1
8	4.8	1
9	5.4	1
10	6	1

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



6.4 Brug af MathCad til simulering af simpelt integrerende system

Et system siges at give et integreretrespons, hvis en ændring i signalet til system giver en konstant øgning af systemets respons. Dette kan besrives ved differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon(t)$$

Den afhængige variabel er i det følgende defineret som $y64_0$:

Startbetingelse: $y64_0 := 0$

Antal støttepunkter: $npunkter := 500$

Startværdi for t: $tstart := 0$

Slutværdi for t: $tslut := 20$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0 .. npunkter$

Integrerende formel: $DF(t, y) := \varepsilon(t)$

Løsning af formel ved brug af rkfixed:

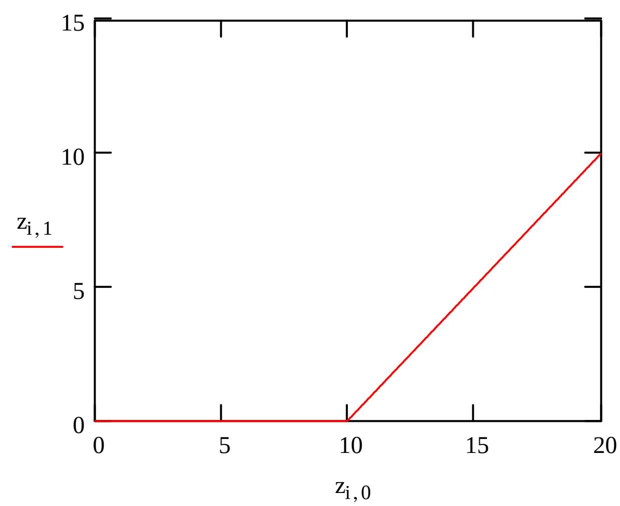
$z := rkfixed(y64, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

$z =$

	0	1
0	0	0
1	0.04	0
2	0.08	0
3	0.12	0
4	0.16	0
5	0.2	0
6	0.24	0
7	0.28	0
8	0.32	0
9	0.36	0
10	0.4	0

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



7. Brug af MathCad til Simulering reguleringssløjfer

Et eksempel på et simpelt integrerende system er en cylindrisk væskebeholder med gennemstrømmende væske, hvor væskestanden holdes konstant ved at regulere strømmen fra beholder. Et sådan system er beskrevet i T.Heilmann *Praktisk Regulering og Instrumentering,* 5. udgave, JHeilmanns Forlag, København, 2004, side 31.
Systemet består af en cylindrisk beholder med dimensionerne:

Diameter: $d_{tank} := 1 \quad m$

Højde: $H_{tank} := 5 \quad m$

Tværsnitsareal: $A_{tank} := \frac{\pi}{4} \cdot d_{tank}^{2} \qquad A_{tank} = 0.785 \quad m^2$

Væskehøjden i beholderen måles kontinuert og er derfor procesvariablen PV. Den ønskede væskehøjde i beholderen er normalt 4 meter. Dette udgør således sætpunktet for stationær drift:

Setpunkt ved stationær drift: $SP := 4 \quad m$

Væskestrømmen til beholderen er normalt: $Q_{i0} := 1 \frac{m^3}{h}$

Medens væskestrømmen fra beholderen styres med en pumpe, således at væskehøjden i beholderen er konstant. Ved stationær drift er væskestrømmen fra beholderen derfor:

Væskestrømmen fra beholderen er normalt: $Q_{u0} := 1 \frac{m^3}{h}$

Bliver væskestanden i beholderen for høj, skal væskestrømmen fra beholderen øges. Det er således ønskeligt at benytte direkte regulering og fejlen på systemet bliver derfor forskellen mellem væskestanden H, procesvariablen, og det aktuelle setpunkt:

Fejlfunktion: $e = H - SP$

Vælges det at sætte reguleringssløjfen op med en PID-regulator, kan væskestrømmen fra beholderen derfor beskrives ved ligningen:

$$Q_u = Q_{u0} + K_p \cdot \left(e + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e \, dt + T_v \cdot \frac{d}{dt} e \right)$$

Hvis vi ønsker at se, hvordan dette system svarer på en ændring i setpunktet, og benytte dette til at sætte reguleringen, skal setpunktet defineres som en funtion af tiden t. Ændrer man eksempelvis setpunktet efter ti timers drift fra 4 til 4,5 meter haves:

$$SP(t) := \text{if}(t < 10, 4, 4.5)$$

Ændringen i væskehøjde kan udtrykkes ved ligningen:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A_{tank}} \cdot \left(Q_{i0} - Q_u\right)$$

Denne ligning skal nu kombineres med reguleringsligningen for en PID-regulator. Dette kommer i princippet til at se således ud:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A_{tank}} \cdot \left[Q_{i0} - \left[Q_{u0} + K_p \cdot \left(e + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t e \, dt + T_v \cdot \frac{d}{dt} e\right)\right]\right]$$

Skrives fejlfuktion e ud i ligningen fås:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A_{tank}} \cdot \left[Q_{i0} - \left[Q_{u0} + K_p \cdot \left[(H - SP) + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t (H - SP) \, dt + T_v \cdot \frac{d}{dt}(H - SP)\right]\right]\right]$$

Eller:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A_{tank}} \cdot \left[Q_{i0} - \left[Q_{u0} + K_p \cdot \left[(H - SP) + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t (H - SP) \, dt + T_v \cdot \frac{d}{dt} H - T_v \cdot \left(\frac{d}{dt} SP\right)\right]\right]\right]$$

Det ses at differentialleddet $\frac{dH}{dt}$ indgår på begge sider af lighedstegnet.

For at kunne indkluderer D-virkningen i MathCads løsning til differentialligningen skal $\frac{dH}{dt}$ isoleres på venstre siden af ligningen. Dette gøres således:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{1}{A_{tank} + K_p \cdot T_v} \cdot \left[Q_{i0} - \left[Q_{u0} + K_p \cdot \left[(H - SP) + \frac{1}{T_n} \cdot \int_0^t (H - SP) \, dt - T_v \cdot \left(\frac{d}{dt} SP\right)\right]\right]\right]$$

MathCad kan ikke udregne den integrerende effekt i regulatoren direkte. Istedet tilføres differentialligningen en ekstra ligning, hvis eneste funktion består i, at integrere fejlen op:

$$\frac{d\left[\int_0^t (H - SP) \, dt\right]}{dt} = H - SP$$

Da setpunktet ikke ændres kontinuert, men pludesligt, er den aflede heraf nul:

$$\frac{d}{dt} SP = 0$$

og skal derfor udelades af ligningen for $\frac{dH}{dt}$

Det fremkomne sæt differentialligninger løses som sædvanlig ved brug af rkfixed:

Startbetingelse: $H := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - SP(0) \end{pmatrix}$ Højde til tiden nul
Fejlen til tiden nul

Antal støttepunkter: $npunkter := 10000$

Startværdi for t: $tstart := 0$

Slutværdi for t: $tslut := 20$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0 .. npunkter$

For blot at have et simpelt eksempel på en proportional regulering, sættes:

$K_p := 1.5$

$T_n := 10^{300}$ Bemærk at integralvirkningen sættes ud af drift ved at sætte T_n meget stor.

$T_v := 0$ Bemærk at differentialvirkningen sættes ud af drift ved at sætte T_d lig nul.

Integrerende formel: $DF(t,H) := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{tank} + K_p \cdot T_v} \cdot \left[Q_{i0} - \left[Q_{u0} + K_p \cdot \left[\left(H_0 - SP(t) \right) + \dfrac{1}{T_n} \cdot H_1 \right] \right] \right] \\ H_1 - SP(t) \end{bmatrix}$

Løsning af formel ved brug af rkfixed:

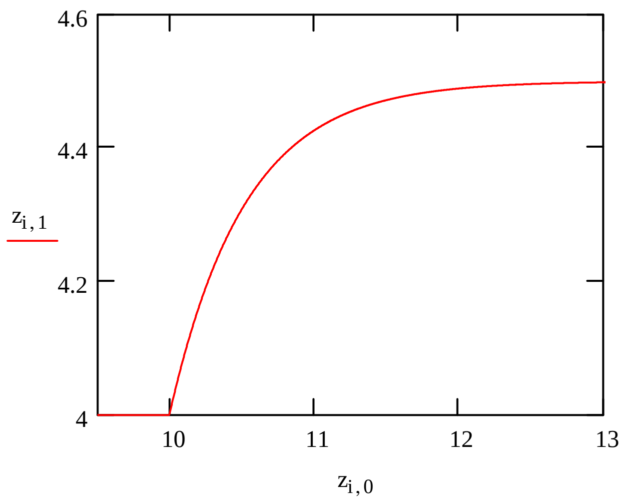
$z := rkfixed(H, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:

z =

	0	1
0	0	4
1	$2\cdot10^{-3}$	4
2	$4\cdot10^{-3}$	4
3	$6\cdot10^{-3}$	4
4	$8\cdot10^{-3}$	4
5	0.01	4
6	0.012	4
7	0.014	4
8	0.016	4
9	0.018	4
10	0.02	4



Det ses, at der intet offset er på reguleringen ganske som forventeligt i et integrerende system, men at reguleringen virker ganske langsomt. Det tager tre timer, før det nye setpunkt er nået. En hurtigere indsvingning kunne kunne således være ønskelig. Øges forstærkningen fås en hurtigere virkende reguleringssløjfe:

$K_p := 100$

$T_n := 10^{300}$ Bemærk at integralvirkningen sættes ud af drift ved at sætte T_n meget stor.

$T_v := 0$ Bemærk at differentialvirkningen sættes ud af drift ved at sætte T_d lig nul.

Integrerende formel: $DF(t,H) := \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A_{tank} + K_p \cdot T_v} \cdot \left[Q_{i0} - \left[Q_{u0} + K_p \cdot \left[\left(H_0 - SP(t)\right) + \dfrac{1}{T_n} \cdot H_1\right]\right]\right] \\ H_1 - SP(t) \end{bmatrix}$

Løsning af formel ved brug af rkfixed:

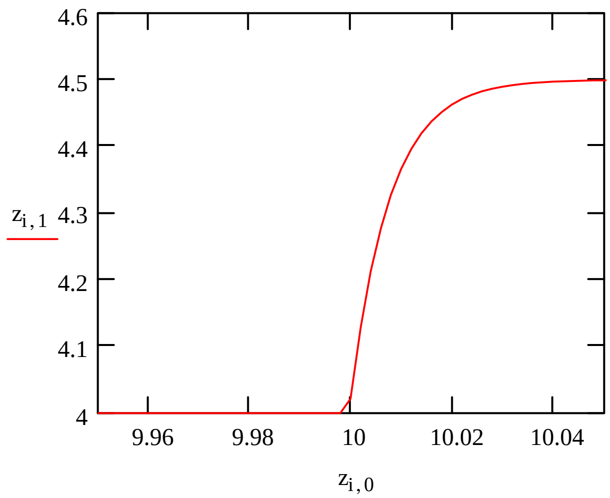
$z := \mathrm{rkfixed}(H, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

$z =$

	0	1
0	0	4
1	$2\cdot10^{-3}$	4
2	$4\cdot10^{-3}$	4
3	$6\cdot10^{-3}$	4
4	$8\cdot10^{-3}$	4
5	0.01	4
6	0.012	4
7	0.014	4
8	0.016	4
9	0.018	4
10	0.02	4

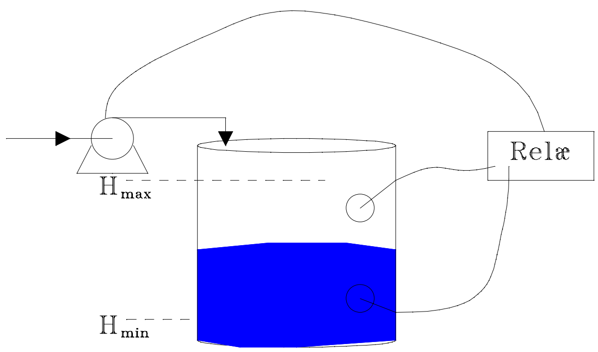
Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



Indsvingningen er nu inden for 3 minutter og kan muligvis gøres bedre endnu. Da systemet ikke kan komme i svingninger. Et reelt system vil dog have en tidsforsinkelse mellem det tidspunkt højden ændre sig til regulatoren modtager information herom fra måleenheden. Denne tidsforsinkelse vil ved for stor forstærkning føre til svingninger i systemet.

8. Brug af MathCad til Simulering af on-off regulering

Et eksempel på et simpelt system, der kan styres med on-off regulering er en cylindrisk væskebeholder, der fungerer som mellemlager. Væskestanden i beholderen må ikke overstige en given grænse, H_{max} og ikke komme under et niveau, H_{min}. Væsken fraledes med en konstant hastighed v_{ud}, men der tilledes kun væske til beholderen, hvis væskestanden i beholderen bliver for lav. Bliver væskestanden for lav startes en pumpe, der først slukkes, når væskestanden når den øvre grænse. Se nedenstående skitse:



Systemet består af en cylindrisk beholder med dimensionerne:

Diameter: $d_{tank} := 10 \quad m$

Højde: $H_{tank} := 10.5 \quad m$

Tværsnitsareal: $A_{tank} := \frac{\pi}{4} \cdot d_{tank}^2 \qquad A_{tank} = 78.54 \quad m^2$

Væskestanden i beholderen kan beregnes ud fra den differentielle massebalance:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{v_{ind} - v_{ud}}{A_{tank}}$$

Væskestanden registreres kun i det øvre og nedre niveau med en flyder. Viser den nedre flyder for lav væskestand skal et relæ starte pumpen, Det sker ved at relæet sættes i sin on-position. Viser den øvre flyder i beholderen, at væskestanden er for høj, skal relæet slå pumpen fra, ved at gå i sin off position. I mellem disse to punkter skal relæet enten være on, hvis tanken fyldes, eller off, hvis tanken tømmes. Dette er i virkelighedens verden en relativ simpel proces, men i simulering ikke helt enkelt. I MathCad kan relæernes opførsel simuleres ved at definere en funktion, der skifter fortegn, afhængigt af om relæet sættes på on, positiv, eller sættes på off, negativ. Uden for disse værdier skal værdien af funktionen holdes konstant positiv eller negativ, afhængigt af om relæet er on eller off.

Dette gøres ved at definere følgende relæfunktion:

$$\text{click}(H_{min}, H_{max}, y, \Delta t) := \text{if}\left[y_0 > H_{max} \wedge y_1 > 0, \frac{-2}{\Delta t}, \text{if}\left[(y_0 < H_{min} \wedge y_1 \le 1), \frac{1}{\Delta t}, 0\right]\right]$$

Her er H_{min} nedre grænse for væskestanden i tanken

H_{max} øvre grænse for væskestanden i tanken

Δt er trinlængden ved løsningen af den differentielle masse balance for væsken i tanken.

y er en vektor, der i dette tilfælde indeholder væskestanden i tanken i y_0 og den aktuelle værdi for relæet (on/off) i y_1

Nedre grænse for væskestanden er: $H_{min} := 1 \;\; \text{m}$

Øvre grænse for væskestanden er: $H_{max} := 10 \;\; \text{m}$

Væskestrømmen fra beholderen er: $v_{ud} := 0.1 \;\; \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$

Væskestrøm fra tændt pumpe: $v_{max} := 0.5 \;\; \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$

Væskestrømmen fra beholderen styres af relæet, som enten tænder eller slukker for pumpen:

$$v(H_{min}, H_{max}, y) := \text{if}(y_1 > 0, v_{max}, 0)$$

Det fremkomne sæt differentialligninger løses som sædvanlig ved brug af rkfixed:

Startbetingelse: $H_{start} := 0 \;\; \text{m}$ Oprindelig højde

$$y := \begin{pmatrix} H_{start} \\ \text{if}(H_{start} < H_{min}, 1, \text{if}(H_{start} > H_{max}, -1, 0)) \end{pmatrix}$$

Højde til tiden nul
Ændring i relævisning til tiden nul

Antal støttepunkter: $\text{npunkter} := 10000$

Startværdi for t: $\text{tstart} := 0$

Slutværdi for t: $\text{tslut} := 24 \cdot 60 \cdot 14 \quad \text{tslut} = 2.016 \times 10^4 \;\; \text{min}$

Løbeparameter til brug ved afbildning: $i := 0 .. \text{npunkter}$

Trinlængden ved løsning af differentialligning: $\Delta t := \frac{\text{tslut} - \text{tstart}}{\text{npunkter}} \qquad \Delta t = 2.016$

Integrerende formel: $DF(t,y) := \begin{pmatrix} \dfrac{v(H_{min}, H_{max}, y) - v_{ud}}{A_{tank}} \\ click(H_{min}, H_{max}, y, \Delta t) \end{pmatrix}$ $A_{tank} = 78.54$

Løsning af formel ved brug af rkfixed:

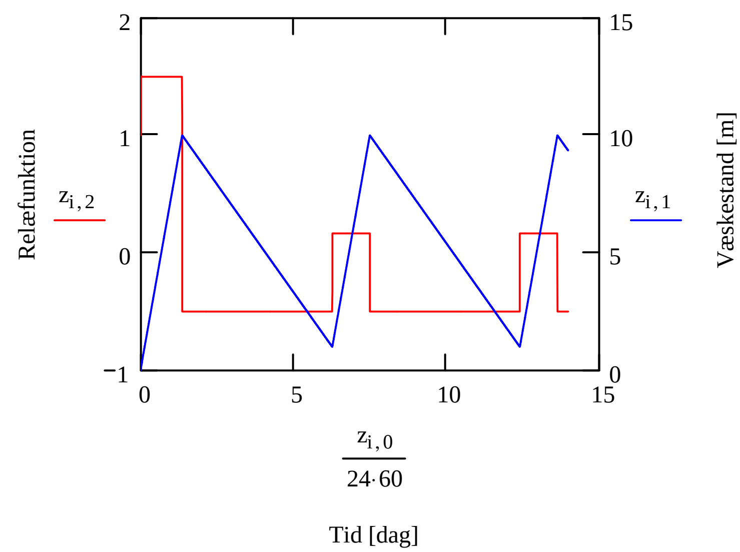
$z := rkfixed(y, tstart, tslut, npunkter, DF)$

Udskrift af løsning i tabelform:

$z =$

	0	1
0	0	0
1	2.016	0.01
2	4.032	0.021
3	6.048	0.031
4	8.064	0.041
5	10.08	0.051
6	12.096	0.062
7	14.112	0.072
8	16.128	0.082
9	18.144	0.092
10	20.16	0.103

Løsningen afbildet i kartesiske koordinater:



Det ses, at reguleringen virker med relativt korte pumpetider og lange hviletider. Dette gør, at relæet ikke skal være aktivt så tit og forlænger dets levetid. Derimod kan det give problemer for pumpen, da pumper ofte har det nemmest ved at arbejde kontinuert. Dette kan eventuelt afhjælpes ved at holde en konstant lav gennemstrømning fra pumpen.